Nuova Secondaria, 1, 4 (1983), 38-40, 57

Geometria e logica

di Carlo Felice Manara

1. In teoria non si vedono le ragioni per cui la logica debba avere con la geometria dei rapporti particolari e più stretti, rispetto a quelli che ha con un'altra scienza: la logica infatti, come dottrina che studia le procedure perché la deduzione sia corretta ed efficace, fornisce i suoi strumenti tanto alla geometria che a qualunque altra scienza che ne abbia bisogno. Sta di fatto tuttavia che, anche nella opinione comune, sembra che la geometria abbia con la logica dei legami privilegiati, tanto che spesso il ragionamento particolarmente corretto e rigoroso si dice condotto *more geometrico*. Ciò è forse dovuto alla grande chiarezza degli oggetti studiati dalla geometria, talché il ragionamento deduttivo sembra confermare e rendere assolutamente certo ciò che già « si vede » e che sembra poter essere anche oggetto di percezione immediata.
Non vogliamo approfondire qui delle analisi psicologiche che esulano dai nostri compiti e dalla nostra portata; ci limitiamo tuttavia ad osservare che, anche dal punto di vista storico, il primo teorema geometrico degno di questo nome, e cioè la proposizione che viene attribuita a Pitagora, costituisce una affermazione della logica sulla esperienza. Infatti una delle sue conseguenze immediate è l'accertamento della esistenza di coppie di segmenti incommensurabili tra loro (come il lato e la diagonale di uno stesso quadrato); e questa conseguenza potrebbe anche essere considerata come l'accertamento della non esistenza di un « atomo di spazio geometrico », di un « elemento » che, ripetuto un numero intero di volte, possa dare una volta il lato ed una seconda volta la diagonale del medesimo quadrato: invero, comunque piccolo si immagini questo elemento supposto esistente, questa operazione non sarà mai possibile. Ma questa conquista del ragionamento sulla esperienza, anzi su ogni esperienza eseguibile, è dovuta alla deduzione e quindi, in ultima analisi, alla logica.
E si noti che questo teorema astratto contraddice la esperienza concreta della fisica; questa infatti afferma che esiste un « atomo » di materia; ma la immaginazione geometrica è qualche cosa di diverso dalla esperienza fisica, e questa scienza è qualche cosa di diverso dalla logica pura.
Nel seguito prenderemo in considerazione i rapporti tra la geometria e la logica da vari punti di vista. Anzitutto richiameremo i problemi logici che riguardano i fondamenti della geometria, e le ricerche che questi problemi hanno originato. In secondo luogo cercheremo di analizzare i vari strumenti deduttivi, i vari « calcoli geometrici » che la geometria ha utilizzato ed utilizza ancora per le proprie deduzioni; infine diremo qualche cosa dei problemi logici del continuo, e della procedura che conduce a dare una immagine numerica di questo oggetto della geometria.

2. Abbiamo accennato poco fa ad un punto di vista storico nei riguardi del nostro argomento; in questo ordine di idee ci pare giusto ricordare che la invenzione delle geometrie non-euclidee, e soprattutto la conquista della certezza della loro compatibilità logica, ha dato origine a molti progressi nella logica, ed ha stimolato quella ricerca sui fondamenti della matematica che ha portato questa scienza al suo assetto moderno. In particolare noi pensiamo che proprio in conseguenza della crisi provocata dalla esistenza delle geometrie non-euclidee, la geometria assunse l'aspetto che ha oggi, di una teoria astratta che ha meritato il nome di « Sistema ipotetico-deduttivo » che le ha dato M. Pieri [8]; cioè l'assetto di un sistema logico nel quale i postulati non pretendono di essere delle proposizioni che dicono la verità sul mondo esterno, ma vogliono essere semplicemente delle ipotesi, dalle quali vengono dedotte le conseguenze per pura forza di logica e non per intuizione della realtà delle cose.
Proseguendo in questa analisi, vorremmo osservare anzitutto che le ricerche sui fondamenti della geometria hanno costretto i matematici a rivedere il significato delle definizioni che, fino a quel tempo, venivano date degli oggetti della loro scienza. Per quanto riguarda in particolare la geometria, vorremmo ricordare qui ciò che scriveva G. Peano nel 1894, ma che a noi appare come degno oggetto di meditazione anche per i ricercatori di oggi [7]. Scrive Peano: « In quasi tutti i trattati italiani moderni si introduce per primo il concetto di *spazio*, dicendo che esso non si definisce, ma gli si attribuiscono le proprietà di essere omogeneo, illimitato, infinito, divisibile, immobi-

le ecc., proprietà queste parimenti non definite.
Ritenendo pertanto il concetto di spazio come fondamentale per la geometria, ne viene che non si potrebbe scrivere un trattato di questa scienza in una lingua che per avventura manchi di tali parole. Quindi non si potrebbe scrivere di geometria nella lingua di Euclide e di Archimede, ove appunto manca la parola corrispondente al termine *spazio*, nel senso in cui lo si usa nei moderni trattati ».
Naturalmente, ciò che Peano dice del termine « spazio » potrebbe essere ripetuto di qualche altro termine che viene utilizzato, e per il quale talvolta forse si fanno dei tentativi di definizione. E ci sentiamo di affermare che, per merito della crisi suddetta, suscitata dalla invenzione delle geometrie non-euclidee, è finalmente risultato chiaro, ai logici ed ai matematici, il fatto che non è possibile definire tutto e che soprattutto i concetti fondamentali di una teoria debbono essere dati con quelle che vengono abitualmente chiamate « definizioni per postulati » o anche « definizioni implicite » o ancora « definizioni d'uso ». In altre parole, è solo possibile enunciare delle proposizioni che contengono i termini da definire; proposizioni che, nel loro insieme, costituiscono la definizione implicita dei termini stessi, ed insieme anche di tutti gli altri simboli linguistici che sono impiegati nella teoria che si espone.
Forse anche qualche difficoltà psicologica nell'accettazione della validità delle geometrie non-euclidee, con pieno diritto accanto alla geometria euclidea tradizionale, è stata originata dal fatto che in tutte queste dottrine (la euclidea e le non-euclidee) vi sono degli enti che sono chiamati con lo stesso nome (per esempio la retta) e che sono essenzialmente diversi da una teoria all'altra; e sono diversi precisamente perché hanno diverse definizioni, cioè perché sono diversi i sistemi di postulati che li definiscono implicitamente, nell'uno o nell'altro sistema teorico. Ma forse la identità dei nomi ha fatto sì che si sentisse come paradossale, o addirittura assurdamente contraddittoria, la fondamentale diversità delle proprietà.
La coscienza della ineliminabilità delle definizioni per postulati degli enti di cui tratta la scienza è oggi accompagnata dal riconoscimento delle necessità di enunciare chiaramente ogni proposizione che verrà utilizzata nel seguito in modo che ogni teorema, ogni proprietà dedotta, sia fondata in modo ineccepibile; cioè non su sensazioni o su pretese intuizioni ma solo sulle proposizioni esplicitamente e coscientemente enunciate come primitive, e quindi non dimostrate, e chiamate « postulati », alla maniera di Euclide (cioè richieste di assenso) oppure « assiomi » oppure addirittura « ipotesi ».

3. Nell'ordine di idee che stiamo per ora seguendo, non vorremmo dimenticare l'opera di K. K. von Staudt, il quale è considerato come uno dei fondatori della geometria proiettiva. Egli costruì questa dottrina su un certo numero di proposizioni primitive, ovviamente diverse da quelle di Euclide; invero l'attenzione di Staudt era attratta soltanto da quelle proprietà degli enti geometrici che sono state in seguito chiamate « grafiche », per distinguerle da quelle « metriche » che vengono prese in considerazione dalla geometria euclidea. Riteniamo che il nome di « geometria di posizione » (*Geometrie der Lage*) [9] che egli diede alla dottrina da lui costruita sia indicativo dello spirito con cui egli lavorò e delle proprietà che egli prese in considerazione. Una analisi psicologica, in seguito sviluppata da F. Enriques [5], porta ad identificare tali proprietà come quelle che il nostro spirito costruisce a partire da sensazioni che appartengono al solo dominio della vista: appartenenza di punti a rette, allineamento di punti, concorrenza di rette in un punto ecc. Occorre tuttavia ricordare che una critica posteriore ha messo in evidenza lo scarso rigore con cui il concetto di continuità viene utilizzato da Staudt nella dimostrazione del teorema fondamentale della proiettività; ed il concetto di continuità ha una genesi psicologica che forse non può essere attribuita alle sole sensazioni visive.
Ripetiamo che non ci è possibile far menzione qui di tutti i sistemi di postulati che sono stati proposti come fondamentali per la geometria; osserviamo tuttavia che il nome della dottrina è rimasto invariato, anche se i contenuti ed i procedimenti sono cambiati. Ed a nostro parere ciò depone a favore del collegamento di questa dottrina con i problemi fondamentali che l'uomo deve affrontare in relazione ai suoi movimenti ed alle manipolazioni che egli fa degli oggetti che lo circondano.
Tra i vari sistemi di postulati che si possono escogitare, e che di fatto sono stati enunciati, vorremmo ricordare anzitutto il sistema proposto da D. Hilbert nella sua classica opera sui fondamenti della geometria [6]. Ci pare di poter osservare che Hilbert curò in certo modo una graduazione nella « complicazione » dei postulati, quasi cercando di stabilire la successione delle proposizioni primitive a seconda della complicazione delle esperienze concrete dalle quali i postulati prendono la loro origine. Troviamo quindi in Hilbert cinque sistemi di postulati che riproducono in qualche modo il cammino della intuizione geometrica nella costruzione della geometria come scienza che tratta anche di una certa realtà esteriore.
Una preoccupazione analoga era presente anche a G. Peano, il quale afferma esplicitamente che il compito del trattatista di geometria è quello di prendere le mosse dalle esperienze più semplici sul mondo esterno e di enunciarle nella forma più elementare possibile.
Ci pare di poter osservare che l'esempio di Peano non fu seguito da altri matematici che si possono ricollegare alla sua scuola; per esempio non fu seguito pienamente da M. Pieri, il quale ha dato vari sistemi di proposizioni primitive, tanto per la geometria elementare che per la geometria proiettiva, ma ha cercato di raggiungere l'ideale di costruire l'universo della geometria con il minimo numero di enti primitivi. Egli giunge così a delle trattazioni teoriche che hanno il pregio di una grande eleganza logica, ma che forse non si legano alla realtà della esperienza sul mondo reale come quelle di Hilbert e di Peano.

4. La esistenza di vari sistemi di postulati, enunciati a fondamento della geometria, rende evidente una circostanza che ha un grandissimo rilievo nei rapporti di questa scienza con la logica: precisamente rende evidente il fatto che la scelta dei postulati è in certa misura libera: U. Cassina si spinge fino ad affermare che tale scelta è « ... un atto di imperio del trattatista » [4], il quale è libero di scegliere la strada che di volta in volta ritiene più opportuna, in vista della propria formazione culturale, dei propri gusti, dello scopo didattico che vuole conseguire.
Occorre tuttavia ricordare che questa libertà non è assoluta, perché è limitata dalla esigenza che il sistema di postulati che si enunciano sia non contraddittorio, ovvero — come si usa dire — sia compatibile. Ed invero, accanto alla libertà di scelta dei punti di partenza, si afferma anche la necessità di accertare il fatto che le proposizioni liberamente scelte non contengano una contraddizione nascosta, che si potrebbe rendere palese nel corso delle deduzioni, infirmando così tutta la validità della costruzione teorica che si è cercato di fondare sul rigore assoluto dei punti di partenza.
È ovvio che il problema della coerenza delle proposizioni primitive non era mai stato posto quando la geometria era considerata come una scienza caratterizzata dai propri contenuti, e quando si pensava che la validità dei postulati fosse garantita dalla evidenza dei loro enunciati, e dai riferimenti esterni a questi. In questo caso infatti il riferimento ad una realtà esterna (anche soltanto « ideale » nel senso platonico del termine) garantiva la coerenza dei postulati enunciati, con riferimento ad una coerenza (ovviamente accettata in modo quasi implicito e non pienamente cosciente) di quella realtà di cui si parlava. Ma, quando si abbandona questa posizione, il problema di garantire la coerenza interna delle proposizioni che si assumono come punti di partenza, o addirittura come ipotesi, diventa preciso e non eludibile.

5. Il problema di cui abbiamo detto ora, cioè quello di garantire la compatibilità del sistema di postulati che si enunciano a fondamento della geometria, si è presentato in forma più o meno esplicita a tutti i costruttori di teorie geometriche, a seconda della finezza del loro spirito critico e della acutezza della loro analisi, ed è stato risolto con vari atteggiamenti. Oggi, dopo i risultati di K. Gödel, appare chiaro che è impossibile sperare che

la risposta al problema possa essere data in termini puramente formali, o in termini di logica deduttiva, nel senso classico della parola.
Naturalmente si potrebbe dire che anche la questione della « esistenza » degli enti di cui tratta la geometria sia nata — in questo senso — soltanto all'epoca di una critica matura, perché tale questione non avrebbe senso nell'atteggiamento classico della geometria. Pare chiaro infatti che, per Euclide, e per tutti i geometri sino alla fine del secolo XVIII, non avesse senso domandarsi se gli enti di cui essi parlavano esistessero oppure no; perché — ripetiamo — la geometria veniva considerata come una scienza avente dei contenuti reali, almeno in un certo senso; e non ostava a questa concezione l'atteggiamento platonico, secondo il quale gli oggetti della geometria esistevano non nella materialità delle figure tracciate sulla sabbia dai matematici, ma nel mondo delle idee; invero la realtà di questa esistenza delle figure non riguardava la tangibilità materiale degli oggetti, ma la coerenza interna delle proposizioni che parlavano di questi oggetti, coerenza che si pensava ovviamente garantita dalla esistenza (materiale o ideale non importa) degli oggetti stessi.

6. Le questioni riguardanti i fondamenti della geometria non sono le sole che toccano i rapporti tra questa scienza e la logica; si potrebbe anzi dire che esse sono tra le ultime che si sono imposte alla attenzione dei ricercatori. Invece, fino dai tempi della matematica greca, sono state studiate con particolare attenzione le questioni che riguardano le procedure di deduzione, per la dimostrazione dei teoremi e le procedure di ricerca delle soluzioni dei problemi geometrici.
A questo proposito, ci sembra opportuno ricordare che, dal punto di vista didattico la geometria ha offerto tradizionalmente la palestra forse più interessante e stimolante di esercizio della logica, per gli studenti che debbono essere educati alla ricerca ed al ragionamento. Su questo tema vorremmo citare qui le parole di un maestro della geometria italiana e grande didatta: Luigi Brusotti. Egli scriveva: « Per un complesso di circostanze da qualche tempo nelle scuole secondarie italiane l'insegnamento geometrico non sembra trovare quella larghezza di svolgimento che meriterebbe; e ciò con particolare riguardo alla risoluzione dei problemi con metodo puramente geometrico. Sfugge forse il valore educativo dei ragionamenti e procedimenti geometrici per la ginnastica mentale che offre ogni attività logica non sorretta da formalismi algoritmici e per l'esercizio della intuizione visiva come elemento euristico ed orientatore. Sfugge ancora, per quanto si attiene alla stereometria, la circostanza che l'intuizione spaziale è nei più infida e torpida quando non venga sottoposta a disciplina ed esercizio » [2].
Noi concordiamo pienamente con il parere dell'illustre Maestro pavese, e vorremmo aggiungere che — come abbiamo già osservato — la geometria è stata occasione di invenzione e di sviluppo di sistemi simbolici deduttivi di particolare interesse.
Forse l'invenzione di questi metodi ha tratto la sua origine da quello che abitualmente viene chiamato il « metodo di analisi » per la risoluzione dei problemi di geometria [1]. Presentiamo nell'allegato dei « Materiali in inserto » tale metodo con le parole di un altro Maestro, grande matematico e filosofo: Federico Enriques.

7. Le brevi considerazioni che abbiamo svolto nel precedente paragrafo mostrano quanto grande sia l'importanza del procedimento deduttivo nella geometria, ed insieme giustificano in qualche modo quella specie di rapporto preferenziale tradizionale tra la logica e la geometria di cui abbiamo detto.
In questa luce vorremmo vedere il significato dei vari metodi di deduzione che sono stati inventati e messi — per così dire — al servizio della geometria e dei suoi problemi.
Dal punto di vista storico, il primo metodo di questa natura è certamente la « geometria analitica » che costituisce, a nostro parere, una delle invenzioni più importanti della storia scientifica del secolo XVII. Invero questa dottrina si presenta anzitutto come un metodo e come un insieme di convenzioni per rappresentare gli elementi geometrici (punti, rette, piani, luoghi geometrici ecc.) mediante opportuni procedimenti, che fanno corrispondere ad essi degli enti dell'algebra: insiemi di coordinate, equazioni di luoghi, o altre relazioni matematiche che rappresentano opportunamente degli insiemi di punti aventi certe determinate proprietà.
Ma la rappresentazione convenzionale biunivoca degli enti geometrici è soltanto la fase iniziale della applicazione del metodo: il momento più importante è quello in cui si applicano le leggi dell'algebra (o addirittura della analisi matematica) alle relazioni così ottenute per dedurre da esse altre relazioni, che sono le loro conseguenze necessarie e quindi per dedurre, dalle proprietà supposte vere (e trascritte mediante le convenzioni accennate) altre proprietà più riposte e giungere infine alle coordinate degli elementi che sono le soluzioni dei problemi posti.
In questa luce, i procedimenti dell'algebra si presentano come vere e proprie leggi di deduzione, cioè dei procedimenti che sono usati per trasformare certi insiemi di simboli (che esprimono certe verità nei confronti degli oggetti rappresentati) in altri insiemi di simboli, che pure esprimono delle verità.
Si intravede qui il germe della evoluzione della logica, evoluzione che porterà questa dottrina, o almeno una parte di essa, alla forma simbolica che oggi possiede; si giustifica anche, in questo ordine di idee, il giudizio che G. Peano dava della matematica, chiamandola una « logica perfezionata ».
È appena necessario osservare che la potenza di questo insieme di metodi favorì un progresso imponente della geometria; ricordiamo a questo proposito che lo stesso Cartesio si mostra ben cosciente di questo fatto; egli infatti, alla fine della sua esposizione, mette in evidenza il valore delle idee che egli ha presentato, ed il loro valore in quanto « metodo », cioè non soltanto per le scoperte che egli ha potuto fare personalmente utilizzando i suoi procedimenti, ma soprattutto per quelle che essi permetteranno di fare in futuro.
È anche vero tuttavia che spesso la utilizzazione dei metodi della geometria analitica, ed in particolare dell'algebra, per la soluzione dei problemi geometrici non permette di seguire ad ogni passo il procedimento che conduce alla soluzione di un dato problema, perché l'algebra giunge ai propri fini con i propri mezzi, e per cammini ovviamente diversi da quelli della geometria; ne consegue che il ricercatore si trova — per così dire — ad avere in mano la soluzione di un problema senza che egli ne veda direttamente il collegamento logico con i dati; collegamento che naturalmente esiste, in forza della corrispondenza biunivoca che è stata stabilita dalle convenzioni di rappresentazione.

8. Abbiamo brevemente analizzato il significato e la portata dei metodi della geometria analitica nella dimostrazione di teoremi e nella risoluzione di problemi geometrici; vorremmo qui svolgere altre considerazioni, ricollegandoci ad un aspetto del metodo che abbiamo cercato di analizzare: precisamente l'aspetto secondo cui l'algebra ci si presenta come uno strumento logico di deduzione.
A questo proposito si può osservare che, nelle ordinarie applicazioni dei metodi della geometria analitica, entra un elemento di arbitrarietà, dato dal sistema di riferimento che si deve scegliere per rappresentare gli oggetti della geometria e quindi per tradurre le loro relazioni ovvero — come si usa dire — per « mettere in equazione » il problema.
Della libertà nella scelta del riferimento può trarre partito il ricercatore esperto, per semplificare i calcoli e per verificare in vari modi la validità di questi e l'assenza di errori materiali nella deduzione: per esempio, la scelta di un sistema di coordinate polari invece delle cartesiane classiche può condurre a mettere in evidenza certe simmetrie e spesso a semplificare i calcoli in maniera utilissima. Si osserva tuttavia che, quando i metodi di geometria analitica vengano utilizzati per la dimostrazione di teoremi, occorrerebbe, a rigore, mostrare che i risultati ottenuti sono indipendenti dalla scelta — a priori arbitraria — del sistema di riferimento; verifica che non sempre viene fatta, perché la cosa appare evidente dal significato « geometrico » che si dà ai numeri che si ottengono o alle soluzioni dei problemi algebrici.
Si potrebbe esporre la stessa cosa con altre parole dicendo che si lavora di necessità con elementi arbitrari, arbitrariamenti scelti e talvolta estranei al problema, e che occorrerebbe liberarsi

(continua a pag. 57)

dalla arbitrarietà delle scelte per giungere alla certezza del valore « obbiettivo » dei risultati ottenuti.

Ciò può generare talvolta una certa scomodità nelle dimostrazioni analitiche dei teoremi; pertanto questa circostanza potrebbe essere considerata come una giustificazione della invenzione di altri strumenti formali di deduzione, che nel secolo scorso sono nati per l'analisi dei problemi geometrici, e per lo sviluppo delle deduzioni relative ai problemi della geometria e della meccanica.

In altre parole, si può osservare che nel secolo scorso vari geometri si misero alla ricerca di simbolismi e di strumenti deduttivi che potessero avere — per così dire — una « presa diretta » sulla realtà degli enti rappresentati e studiati, senza passare attraverso le convenzioni della geometria analitica e quindi senza richiedere la scelta di elementi di riferimento in certo modo estranei ai problemi trattati.

Un primo germe di questo atteggiamento si potrebbe trovare nell'opera di K. K. von Staudt il quale, nel suo libro intitolato *Beiträge zur Geometrie der Lage* (Complementi alla geometria di posizione) introdusse un « calcolo delle quaterne » degli elementi di una forma di prima specie; egli giunse così da una parte alla introduzione diretta delle coordinate proiettive e da un'altra parte giunse alla costruzione di un embrione di formalismo che permetteva la deduzione senza dover passare attraverso le coordinate tradizionali.

Accanto all'opera di Staudt, vorremmo anche ricordare quella di A. F. Möbius; questo geometra, nella sua opera intitolata *Barizentrisches Kalkül* (Calcolo baricentrico) tratta l'aspetto geometrico dei problemi di statica, e costruisce un insieme di strumenti formali per la rappresentazione degli enti geometrici, e per la deduzione e la ricerca di nuove proprietà geometriche e meccaniche.

Un terzo esempio di questo atteggiamento è dato dal volume di H. Grassmann intitolato *Ausdehnungslehre*. In questa opera l'autore introduce due specie di grandezze, che egli chiama rispettivamente intensive ed estensive; per entrambe egli introduce un sistema di simbolizzazione e di calcolo che conduce direttamente alla soluzione di problemi di geometria e di statica senza passare attraverso le abituali convenzioni della geometria analitica.

L'idea di Grassmann venne ripresa da G. Peano, e sviluppata nell'opera intitolata *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann* [7, c]; qui Peano dà una interpretazione precisa di quelle che Grassmann chiamava le grandezze intensive; inoltre egli sviluppa dei metodi di rappresentazione degli enti della geometria e di soluzione dei problemi; metodi che hanno come oggetto direttamente le aree, i punti, i vettori, i volumi ecc. senza utilizzazione diretta delle coordinate. Ci pare anche interessante ricordare che il *Calcolo geometrico* è la prima pubblicazione in cui Peano presenta anche delle notazioni di logica simbolica; pertanto, in questa sua opera, Peano presenta insieme dei metodi di algebra della logica e di simbolizzazione diretta degli enti della geometria, con una profonda visione unitaria dei problemi di queste due scienze. I metodi di calcolo geometrico di Peano sono stati ripresi e divulgati dai suoi scolari, soprattutto da C. Burali Forti [3].

Si potrebbe dire che nello stesso ordine di idee si muovono le ricerche che diedero origine al calcolo dei quaternioni di W. R. Hamilton, al calcolo degli operatori della meccanica di G. Giorgi, ed ai vari metodi di calcolo vettoriale che sono in uso ancora oggi.

Carlo Felice Manara
Università di Milano

BIBLIOGRAFIA

[1] Agostini Amedeo, *I problemi geometrici elementari e i problemi classici*, in « Enciclopedia delle Matematiche elementari », vol. II, parte 1, Art. XXIX, Milano 1937.

[2] Brusotti Luigi, *Questioni didattiche*, in « Enciclopedia delle Matematiche elementari », vol. III, parte 2, Art. LXI, Milano 1949.

[3] Burali Forti Cesare, *Lezioni di Geometria metrico-proiettiva*, Torino 1904; *Corso di Geometria analitico-proiettiva*, Torino 1912.

[4] Cassina Ugo, *Sulle definizioni per astrazione*, Atti I Congresso di studi metodologici, Torino 1952.

[5] Enriques Federico, *Spazio e tempo davanti alla critica moderna*, in « Questioni riguardanti le Matematiche elementari », raccolte e ordinate da F. Enriques, Art. XII.

[6] Hilbert David, *Grundlagen der Geometrie*, VI ed. Leipzig 1923. Tradotto in italiano da P. Canetta col titolo: *Fondamenti di Geometria*, Milano 1970.

[7] Peano Giuseppe, a) *Principi di Geometria logicamente esposti*, Torino 1889; b) *Sui fondamenti della Geometria*, Torino 1894; c) *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, Torino 1888.

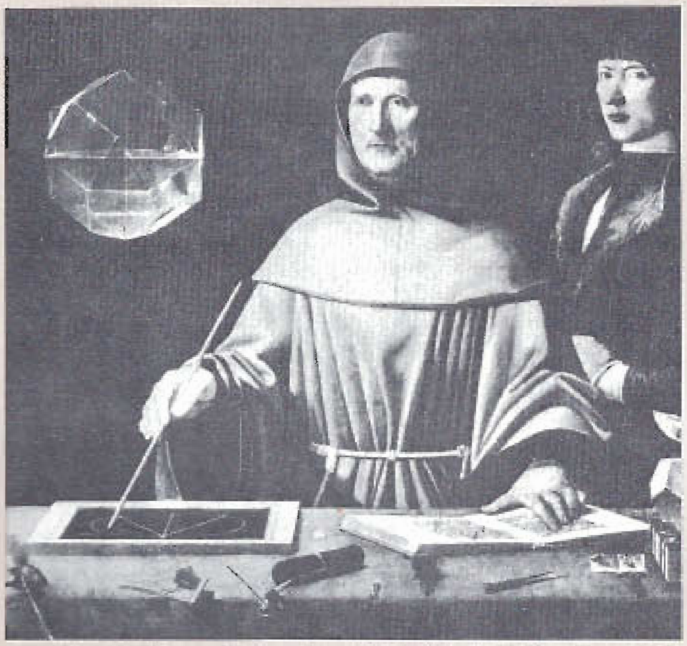
[8] Pieri Mario, *Della Geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo. Monografia del punto e del moto*, 1898-99.

[9] Staudt Georg K. K. von, *Geometrie der Lage*, Nürenberg 1897. Tradotto in italiano da M. Pieri col titolo: *Geometria di posizione*, Torino 1880.

(segue da pag. 40)

sibile assegnare un insieme o una « classe », come sua « estensione », a una nozione arbitraria logicamente definibile. La nozione originaria di « insieme » secondo Cantor, quale « collezione », riunita in un tutto, di certi oggetti ben distinti della nostra intuizione e del nostro pensiero » [...] richiede dunque una qualche restrizione; essa non è stata sostituita con successo da una che sia altrettanto semplice e non dia adito a tali riserve. In questa situazione non ci resta nient'altro da fare che procedere nella direzione opposta, e cercare, partendo dalla teoria degli insiemi com'è storicamente data, i *principi* richiesti per stabilire i fondamenti di questa disciplina matematica. Nel risolvere questo problema dobbiamo da una parte restringere sufficientemente questi principi in modo da escludere tutte le contraddizioni, e dall'altra sceglierli abbastanza forti sì da mantenere tutto ciò che vi è di valido nella teoria. (E. Zermelo, « Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre », *Matematische Annalen* 65 (1908); trad. it. in *La logica del Novecento*, a cura di E. Casari, Loescher, Torino 1981, pp. 270-271).

La teoria della dimostrazione hilbertiana. *La proposta fondazionale di Hilbert prevedeva in primo luogo la formalizzazione delle varie teorie matematiche. Il passo successivo era (o avrebbe dovuto essere) la dimostrazione diretta della loro non contraddittorietà, da ottenersi attraverso lo studio metamatematico delle dimostrazioni formali.*



Luca Pacioli (Borgo S. Sepolcro 1445-1510). Frate francescano, si dedicò all'insegnamento della matematica che impartì in molte città. La sua « Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità » (1494) è il primo trattato generale di aritmetica e algebra pubblicato a stampa.

L'idea fondamentale della mia teoria della dimostrazione è la seguente: tutto ciò che costituisce la matematica nel senso odierno viene rigorosamente formalizzato, cosicché la matematica vera e propria o la matematica in senso stretto diventa un patrimonio di formule. Queste differiscono dalle abituali formule della matematica solo perché compaiono in esse, oltre ai simboli abituali, anche i simboli logici, in particolare i simboli per « implica » (→) e per « non » ($\bar{\ }$).
Determinate formule, che servono da mattoni per l'edificio formale della matematica, sono chiamate assiomi. Una dimostrazione è una figura che ci deve essere presente intuitivamente come tale; essa è costituita da inferenze eseguite in base allo schema di inferenza

$$\frac{\begin{array}{c}S\\ S \to T\end{array}}{T}$$

in cui ognuna delle premesse (cioè le formule S e S → T) o è un assioma (o è derivata direttamente per sostituzione da un assioma), o coincide con la formula finale T di una inferenza che compare precedentemente nella dimostrazione (o è derivata per sostituzione da una tale formula finale). Una formula è detta dimostrabile se è o un assioma (o derivata per sostituzione da un assioma) o la formula finale di una dimostrazione.
Accanto alla matematica vera e propria, così formalizzata, c'è una matematica in certo modo nuova, una metamatematica, necessaria per garantire la sicurezza della prima e nella quale, contrariamente ai procedimenti inferenziali puramente formali della matematica vera e propria, si applicano inferenze contenutistiche, ma unicamente al fine di dimostrare la non-contraddittorietà degli assiomi. In questa metamatematica si opera con le dimostrazioni della matematica vera e propria, e queste ultime costituiscono l'oggetto stesso dell'indagine contenutistica. (D. Hilbert, « Die logischen Grundlagen der Mathematik », *Mathematische Annalen* 88 (1923); trad. it. in *Dalla logica alla metalogica*, a cura di E. Casari, Sansoni, Firenze 1979, pp. 68-69).

L'empirismo in matematica. *La proposta che si tende oggi a qualificare empirista si configura essenzialmente come un attacco contro il formalismo, o almeno contro quel (modo di intendere il) formalismo che porta all'identificazione delle dimostrazioni con le dimostrazioni formali. Si tenga presente, tuttavia, che neppure in logica si danno dimostrazioni formali; queste sono se mai oggetto di studio metamatematico, ad esempio, come si è visto poco sopra, in teoria della dimostrazione.*

Nessuno si sogna di mettere in dubbio il fatto che alcuni problemi di una teoria matematica possono essere affrontati solo dopo la sua formalizzazione, proprio come alcuni problemi sugli esseri umani (concernenti, poniamo, la loro anatomia) possono essere affrontati solo dopo la loro morte. Ma sarebbe azzardato inferire da ciò che gli esseri umani sono « adatti all'indagine scientifica » solo quando sono « presentati in forma morta » [...].
Ma la filosofia formalista della matematica ha radici molto profonde. È l'ultimo anello della lunga catena delle filosofie *dogmatiche* della matematica. [...] Ogni volta che il dogmatismo matematico dell'epoca entrava in « crisi », una nuova versione forniva ancora una volta l'autentico rigore e i fondamenti definitivi, ripristinando così l'immagine di una matematica autorevole, infallibile, inconfutabile [...]. È proprio ora di rimettere in discussione questo dogma. (I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, Cambridge 1976; trad. it. *Dimostrazioni e confutazioni*, a cura di G. Giorello, Feltrinelli, Milano 1979, p. 41 *n* e pp. 42-43).

L'attuale vicolo cieco della filosofia della matematica è la conseguenza del grande periodo di controversie fondazionali iniziato con Frege e Russell e continuato con Brouwer, Hilbert e Gödel. Quanto è ora necessario è un nuovo inizio, non una continuazione delle varie « scuole » del logicismo, del formalismo o dell'intuizionismo. [...]
Molte delle difficoltà e degli ostacoli della filosofia della matematica sono dovute a pregiudizi filosofici che abbiamo ereditato e che siamo liberi di abbandonare, se decidiamo di farlo. (R. Hersh, Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics », *Advances in Mathematics* 31, 1979, p. 31).

Il metodo di analisi per la risoluzione dei problemi geometrici

Riportiamo un passo in cui F. Enriques *descrive sinteticamente il cosiddetto « metodo analitico » per la risoluzione dei problemi geometrici, ricordando come esso non soltanto fosse già stato inventato dagli antichi Greci, ma anche come costoro fossero consapevoli della complessità logica di questo procedimento, il cui valore intellettuale si è mantenuto intatto negli sviluppi assai diversi cui esso ha dato luogo lungo i secoli.*

La scuola di Platone, e poi di Eudosso, dà un particolare significato logico e metodologico al procedimento « analitico » che si mette in opera nella risoluzione dei problemi geometrici.

In questa « analisi » si comincia col supporre che il problema proposto P sia risoluto, e si deducono successivamente le condizioni a cui debbono soddisfare gli elementi cercati, trasformando il problema dato in una serie di problemi, ciascuno dei quali venga risoluto in forza del precedente, finché si arrivi ad un problema R che si sappia effettivamente risolvere. La « sintesi » consiste nel partire dalla soluzione di quest'ultimo problema R, e dedurne via via la risoluzione della nostra catena di problemi in ordine inverso, fino a dimostrare la soluzione di P. Questa dimostrazione è necessaria, perché coll'analisi si è dimostrato soltanto che le soluzioni di P sono soluzioni di R ma non viceversa. Insomma l'analisi è una decomposizione ideale del concetto della figura da costruire, nelle condizioni, proprietà o note che lo determinano (ed è quindi in rapporto con la teoria platonica delle Idee). Essa appare come un procedimento di generalizzazione dei problemi. L'opposto si può dire della sintesi, la quale — da sola — fornisce certo soluzioni del problema proposto, ma non tutte.

Il significato greco dell'analisi dei problemi geometrici si è evoluto nel progresso moderno delle scienze matematiche; su questa evoluzione sembra aver influito massimamente il fatto che il metodo di risoluzione detto dei « luoghi geometrici » è divenuto, con Cartesio, il fondamento d'un'applicazione sistematica dell'algebra alla geometria. Nella trattazione algebrica si è vista soprattutto la decomposizione delle condizioni del problema in condizioni elementari, espresse da equazioni. Perciò il metodo cartesiano ha ricevuto il nome di « Geometria analitica », e poi tutta l'algebra, con il calcolo, differenziale ed integrale in cui si prolunga, ha preso il nome di « analisi matematica ». Con questo nome i moderni riconoscono, in qualche modo, nella più generale scienza dei numeri e delle equazioni, l'organo della matematica, che permette di analizzare e ricondurre ad una forma comune più generale, tutti i problemi di geometria, di meccanica ecc. (F. Enriques, Voce « Analisi » nell'*Enciclopedia Italiana di Scienze, Lettere e Arti*, Treccani).

La riflessione consapevole sulla struttura di questo metodo può consentire chiarimenti di natura didattica assai importanti. Molto spesso infatti, quando si utilizzano i metodi della geometria analitica, non tutte le soluzioni del problema algebrico hanno un significato geometrico, perché spesso le operazioni di calcolo conducono ad equazioni, o in generale a relazioni, che sono soltanto delle conseguenze dei dati e delle domande del problema e che non sono ad esse perfettamente equivalenti. Pertanto occorrerebbe, ogni volta che si trovano le soluzioni per via analitica, dimostrare che esse sono tutte anche soluzioni del problema geometrico, oppure distinguere tra quelle che lo sono e quelle che non lo sono; in questo consiste il procedimento che in certa trattatistica elementare viene chiamato di « discussione » delle equazioni algebriche e delle loro soluzioni.

Nepero (John Napier) (Edimburgo 1550-1617).

Pierre de Fermat (Beaumont de Lomagne 1601-Castres 1665).

Eulero (Leonhard Euler) (Basilea 1707-Pietroburgo 1783).

La didattica della matematica

Proprio la grande ricchezza *e profondità delle dimensioni intellettuali, spirituali e culturali della matematica, mentre per un verso costituiscono un potentissimo invito ad assicurarne a tutti lo studio come impareggiabile strumento di formazione, per altro verso deve farci comprendere come tale studio debba tenere in massimo conto gli stadi dello sviluppo della personalità. Con ciò non si tratta soltanto di aver l'occhio attento alle fasi psicologiche di maturazione delle capacità cognitive (ad esempio astrazione, argomentazione logico-formale e simili), ma addirittura alle più complesse forme della maturazione della personalità nel suo assieme. Più eloquente ed incisiva di tante riflessioni moderne in proposito ci pare questa raccomandazione di Platone che, mentre sottolinea la funzione preparatoria della matematica alle vette più ardue della speculazione filosofica (qui chiamata « dialettica ») e la necessità di iniziare sin dalla fanciullezza il relativo studio, chiarisce con un lampo di genio il vero fondamento di ogni preoccupazione contro il precocismo e l'adultismo, ossia la loro natura di violenza, incompatibile con quella caratteristica di libertà che contraddistingue ogni vera conquista dello spirito.*

(*Socrate*) - Occorre dunque che i calcoli ([illegible]) e la geometria e tutta la propedeutica che deve precedere la dialettica, siano proposti per lo studio fin dalla fanciullezza, ma è necessario non dare all'insegnamento forma di studio sforzato.

— Perché?

— Perché l'uomo libero non deve imparare alcuna disciplina attraverso una servile costrizione. Infatti le fatiche corporali fatte per forza non producono alcun male al corpo, mentre nessun insegnamento introdotto a forza permane stabilmente nell'anima.

— È vero, disse.

— Non educare dunque per forza, o egregio amico, dissi, i fanciulli nelle discipline, ma come se giocassero, affinché tu sia pure maggiormente in grado di vedere a che cosa tenda ciascuno per natura. (Platone, *Repubblica*, VII, 536 d-537 a).